DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.03.010

高次 Haar 函数的推广*

陈 伟[1]，蔡占川[2]
（1. 江南大学数字媒体学院，江苏 无锡 214122；
2. 澳门科技大学资讯科技学院，澳门）

摘 要：k 次 V-系统是一类正交分段多项式函数系，Haar 函数是当 $k=0$ 时的情形，因而又称为高次 Haar 函数。V-系统定义在区间 [0,1] 上的均匀剖分上，经过对所谓“生成元函数”进行 2^n 倍压缩及平移得到。提出了一种正交非均匀分段多项式函数系的构造方法，称之为高次非均匀 Haar 函数系。对于任意给定的区间 [0,1] 上的非均匀层次嵌套剖分，首先定义一组截断单项式，并证明了对这组截断单项式系进行 Gram-Schmidt 过程，结果便是相应的高次非均匀 Haar 函数，原来的 V－系统只是高次非均匀 Haar 函数系的特殊情形。证明了该函数系的正交性，再生性及收敛性，并给出了一个具体构造实例。

关键词：V－系统；Haar 函数；非均匀；Gram-Schmidt
中图分类号：TP3 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2016）03－0059－05

The generalization of high order Haar functions

CHEN Wei[1], *CAI Zhanchuan*[2]
（1. School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;
2. Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macau, China）

Abstract: The k degree V-system is a class of orthogonal piecewise polynomial functions which is also named as high order Haar functions. V-system is defined on the uniform partition of interval [0,1] and obtained by multi-scale squeezing and shifting operations on the so-called generators. The V-system to the case of non-uniform partition is generalized, and the corresponding result is named as high order non-uniform Haar functions. For any given partition on the interval [0,1], a set of truncated monomials was firstly defined. It is proved that the non-uniform Haar functions can be obtained through the Gram-Schmidt orthogonalization process. The orthogonality, reproducibility and convergence of the proposed functions are proved, and a specific constructive example is also given.

Key words: V-system; Haar functions; non-uniform; Gram-Schmidt

正交变换在信号逼近、压缩、特征提取等领域具有广泛的应用，它的数学基础便是正交函数系[1-3]。在众所周知的 Fourier 三角函数系以及诸多正交多项式系中，每一个基函数不仅是连续的，而且具有任意阶的连续导数。历史上，为了回答“是否存在非连续的完备正交函数系”这样的反问，匈牙利数学家 Haar 构造了后人称呼的“Haar 函数”。如果不考虑规范系数，Haar 函数仅取值 +1，－1 或 0，因此可以看作是一类正交零次分段多项式函数系。当小波分析兴起后，Haar 函数成为小波变换中典型的波函数代表[1]。

2007 年，国内学者宋瑞霞等[4] 构造了一类

* **收稿日期**：2015－07－07
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61402201）；澳门科技发展基金资助项目（110/2014/A3）；浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题资助项目（A1513，A1609）；中央高校基本科研业务费资助项目（JUSRP11416）
作者简介：陈伟（1986 年生），男；**研究方向**：信号处理；E-mail：chenwei.must@gmail.com

$L^2[0,1]$ 上的完备正交分段多项式函数系，称为 $k(k=0,1,2,\cdots)$ 次 V－系统，V－系统是一类有限区间上的正交多小波[5]，Haar 函数是 $k=0$ 时的特殊情形，因此 V－系统又称为高次 Haar 函数[6]。与传统的连续正交函数不同，V－系统既包含光滑函数，又有各个层次的间断函数，从而能够表达更加复杂的信号。文献［7－9］将 V－系统应用到几何图形表达，数据聚类，三维模型重构与检索等实际问题中，取得了良好的结果。

V－系统是通过对所谓“生成元函数”作 $2^n(n=1,2,\cdots)$ 倍压缩得到，这种构造方式建立在区间 $[0,1]$ 的均匀剖分基础上，因而基函数的分段点位置只出现在 $q/2^p$ 处。本文的目的，是构造非均匀剖分节点下的 V－系统，称之为非均匀高次 Haar 函数。

当分段节点位置为非均匀分布时，原来的 V－系统构造方法不再有效。也就是说，不再能够通过压缩与平移操作得到。本文提出了一种高次非均匀 Haar 函数系的构造方法，根据给定的区间 $[0,1]$ 上的非均匀层次嵌套分割，首先定义一类线性无关函数系。本文证明，对这类线性无关函数系作 Gram-Schmidt 正交化手续，结果便是对应非均匀节点分割上的高次 Haar 函数系，原来的均匀 V－系统只是它的一种特殊情形。进一步地，本文从理论上证明了高次非均匀 Haar 函数系的正交性，再生性及收敛性。

1 V－系统

V－系统是一类正交分段多项式函数系，其中既包含连续的基函数，又包含具有各种层次间断性的基函数。因此 V－系统能够兼顾 Fourier 三角基与 Haar 函数的优点，可以更好地表达信号。

V－系统基函数是按照分组及分类给出排列次序。第 0 组为定义在区间 $[0,1]$ 上的前 $k+1$ 个 Legendre 多项式，记为 $\{V_{k,0}^i(x), i=1,2,\cdots,k+1\}$。第 1 组为 $k+1$ 个生成元函数，记为 $\{V_{k,1}^i(x), i=1,2,\cdots,k+1\}$。从第 2 组开始，V－系统中所有基函数通过对生成元函数作不同尺度的压缩与平移得到，记为 $\{V_{k,n}^{i,j}(x)\}$。其中，k 为次数，n 为组号，i 为组内 的类号，j 为类中的序号。

定义 1 （生成元函数）若函数集 $\{V_{k,1}^i\}_{i=1}^{k+1}$，$x\in[0,1]$，对 $i,j\in\{1,2,\cdots,k+1\}$ 满足如下条件：

（i）$V_{k,1}^i\in C^{k-i}$ 是以 $x=1/2$ 为节点的分段 k 次多项式；

（ii）$[V_{k,1}^i, V_{k,1}^j]=\delta_{ij}$，

其中

$$[f,g]\triangleq\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

（iii）$[V_{k,1}^i, x^{j-1}]=0$。

则 $\{V_{k,1}^i\}_{i=1}^{k+1}$ 称为 k 次 V－系统的生成元。

从第 2 组（$n=2$）开始，V－系统中的基函数均由生成元经压缩及平移直接得到，如下：

$$V_{k,n}^{i,j}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^{n-2}}V_{k,1}^i\left(2^{n-2}\left(x-\dfrac{j-1}{2^{n-2}}\right)\right), & \dfrac{j-1}{2^{n-2}}\leqslant x<\dfrac{j-1}{2^{n-2}};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$n=2,3,\cdots;i=1,2,\cdots,k+1;j=1,2,\cdots,2^{n-2}$$

那么，函数集合

$$\{V_{k,0}^i(x)\}\cup\{V_{k,1}^i(x)\}\cup\{V_{k,n}^{i,j}(x)\}$$

即为 k 次 V－系统。

可以看出，在 V－系统的构造中，生成元函数是关键。V－系统中所有后续基函数 $\{V_{k,n}^{i,j}(x)\}$ 是通过对生成元函数作 2^{n-1} 倍压缩及平移得到。图 1 显示了 1 次 V－系统的前 16 项基函数，其中第 2 组与第 3 组均由生成元函数经压缩及平移得到。

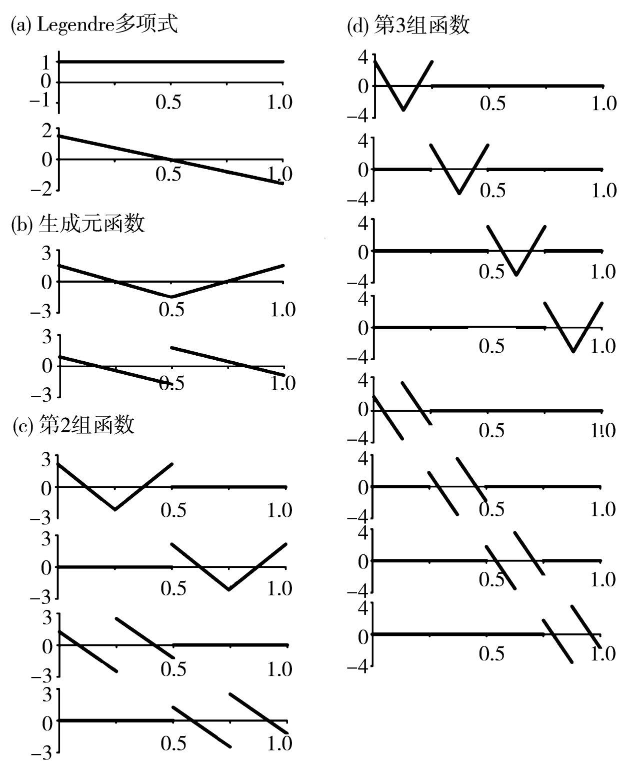

图 1 均匀 V－系统前 10 项基函数（$k=1$）

Fig. 1 The first 10 base functions of uniform V-system（$k=1$）

2　高次非均匀 Haar 函数

2.1　非均匀层次嵌套分割

Haar 函数及 V－系统定义在区间 [0,1] 的自相似均匀分割上。本文构造的高次 Haar 函数系，同样定义在一个具有层次嵌套关系的分割上。不同的是，各层的分割位置不再固定为 $q/2^p$ 处。

定义 2　（非均匀层次嵌套分割）

$$X^n = \{x_j^n\}_{j=0}^{J_n}, n = 0,1,2,\cdots$$

为区间 [0,1] 上的第 n 层非均匀剖分，满足如下条件：

（iv）$J_n = 2^n$；

（v）$x_0^n = 0, x_{J_n}^n = 1$；

（vi）子区间长度 $x_{j+1}^n - x_j^n$ 由 j 决定；

（vii）$x_j^{n-1} = x_{2j}^n$，　$j = 0,1,\cdots,J_{n-1}$，体现相邻两层分割之间的层次嵌套关系。

图 2 所示为当 $n = 0,1,2,3,4$ 时的某一组非均匀层次嵌套分割。

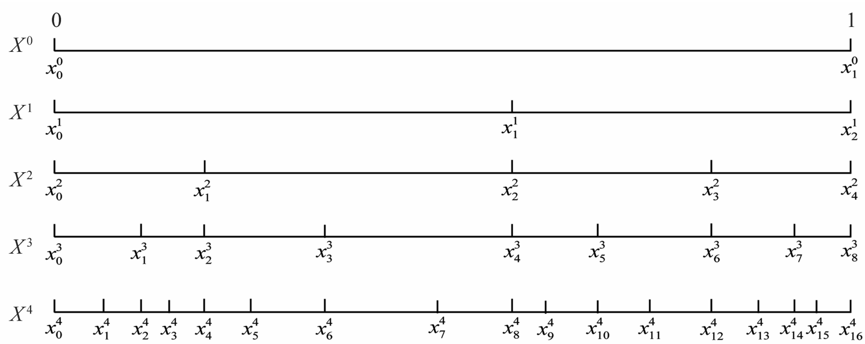

图 2　区间 [0,1] 上的非均匀层次嵌套分割

Fig. 2　Non-uniform hierarchical nested partition in the interval [0, 1]

2.2　截断单项式

本文构造的高次非均匀 Haar 函数系，由于失去了原有自相似均匀剖分的特点，不再能够直接通过生成元函数得到整个函数系。因此，首先定义一类截断单项式函数系。

定义 3　（截断单项式函数系）当 $n = 0$ 时，令 $\{W_{k,0}^i(x)\}_{i=1}^{k+1}$ 为区间 [0,1] 上的前 $k+1$ 个 Legendre 多项式；当 $n \geqslant 1$ 时，定义

$$W_{k,n}^{i,j}(x) = (x - x_{2j-1}^n)_+^{k+1-i}$$

其中，$n = 1,2,\cdots; i = 1,2,\cdots,k+1; j = 1,2,\cdots,2^{n-1}; x_{2j-1}^n \in X^n$。那么，

$$\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$$

称为 X^n 上的截断单项式函数系。

2.3　高次非均匀 Haar 函数

定理 1　对截断单项式函数系 $\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$ 按 Gram-Schmidt 正交化手续得到的标准正交函数系，即为 X^n 上的 k 次非均匀 Haar 函数系。

证明　按截断单项式函数系中的函数按序排列并记为 $W_1, W_2, \cdots, W_j, \cdots$，相应的正交化结果记为 $G_1, G_2, \cdots, G_j, \cdots$，而将 k 次非均匀 Haar 函数系记为 $V_1, V_2, \cdots, V_j, \cdots$。

当 $j = 1$ 时，可具体验证 $G_1 = W_1 = V_1$。

当 $j = 2$ 时，可具体验证 $G_2 = W_2 = V_2$。

假定 $G_j = V_j$ 对 $j = 1,2,\cdots,m-1 (m \geqslant 4)$ 成立，根据 Gram-Schmidt 正交化手续，

$$\hat{G}_j = W_j - \sum_{i=1}^{j-1} [W_j, V_i] V_i,$$

$$G_j = \frac{\hat{G}_j}{\|\hat{G}_j\|} = V_j$$

下面将证明上述事实对 $j = m$ 也成立。

设 $W_j = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i V_i$，根据归纳假设条件有

$$W_m = \alpha V_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i V_i$$

因此，$\hat{G}_m = \alpha V_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta'_i V_i$。而由于

$$[\hat{G}_m, V_i] = [V_m, V_i] = 0, i = 1,2,\cdots,m-1$$

于是得到 $\alpha[V_m, V_i] - \beta'_i = 0, \beta'_i = 0$。则

$$\hat{G}_m = \alpha V_m, G_m = \frac{\hat{G}_m}{\|\hat{G}_m\|} = V_m$$

证毕。

2.4　性质

定理 2（标准正交性）　k 次非均匀 Haar 函数系是 $L^2[0,1]$ 上的标准正交函数系，即

$$\int_0^1 V_i(x) V_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij}, i,j = 0,1,2,\cdots$$

证明　根据定理 1，k 次非均匀 Haar 函数系由

线性无关函数组经 Gram-Schmidt 正交化手续得到，从而得证。

定理 3（再生性） 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的分段 k 次多项式，且分段点位于 $X^n \setminus \{0,1\}$，则 $f(x)$ 可以用 X^n 上的 k 次非均匀 Haar 函数系的有限项基函数线性组合精确表示，即

$$f(x) = \sum_{i\in\Lambda} \alpha_i V_i(x)$$

其中 Λ 为有限的指标集。

证明 根据定义 2，记 X^n 分割之下的分段 k 次多项式集合为 P_{k,Δ_n}，则

$$\mathrm{span}\{V_0, V_1, \cdots, V_{2^n(k+1)-1}\} \supseteq P_{k,\Delta_n},$$

$$\dim(P_{k,\Delta_n}) = 2^n(k+1),$$

$$\mathrm{span}\{V_0, V_1, \cdots, V_{2^n(k+1)-1}\} \subseteq P_{k,\Delta_n}$$

因而

$$\mathrm{span}\{V_0, V_1, \cdots, V_{2^n(k+1)-1}\} = P_{k,\Delta_n}$$

此即说明，X^n 分割之下任一分段 k 次多项式都可以由 k 次非均匀 Haar 函数系的前 $2^n(k+1)$ 个基函数精确表达。证毕。

假设 $f(x)$ 是给定的函数，定义

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i V_i(x)$$

为函数 $f(x)$ 的非均匀 Haar 级数，其中

$$\alpha_i \triangleq \int_0^1 f(x) V_i(x)\,\mathrm{d}x$$

记

$$S_n f \triangleq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i V_i(x)$$

为函数 $f(x)$ 的非均匀 Haar 级数的部分和。那么，有下面的定理。

定理 3（平方收敛性） 若 $f(x) \in L^2[0,1]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0$。

证明 若定义在 Δ_n 上的 k 次非均匀 Haar 函数系所张成的子空间 $M_{k,n}$ 的并集在 $L^2[0,1]$ 中稠密，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - S_n f\|_2 = 0$。下面证明 $\cup_{n=0}^{\infty} M_{k,n}$ 在 $L^2[0,1]$ 中稠密。

由于区间 $[0,1]$ 上的连续函数在 $L^2[0,1]$ 中稠密[10]，若 $f(x) \in L^2[0,1]$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，总可以找到 $g \in C[0,1]$，满足 $\|f - g\|_2 < \varepsilon/3$。由 Weiwestrass 逼近定理可知，存在多项式 $p(x)$，使得 $\|g - p\| < \varepsilon/3$。对于任意多项式，总存在充分大的 n，当 $l(x) \in P_{k,\Delta_n}$ 时，满足 $\|p - l\| < \varepsilon/3$。

另一方面，$l(x) \in P_{k,\Delta_n}$，即表明对于 $f(x) \in L^2[0,1]$ 来说，存在 $h(x) \in M_{k,n}$，使得

$$\|f - h\|_2 = \|f - g + g - p + p - h\|_2 \leqslant$$

$$\|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 + \|p - h\|_2 < \varepsilon$$

这样就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - S_n f\|_2 = 0$。证毕。

定理 3 表明本文构造的高次非均匀 Haar 函数系是 $L^2[0,1]$ 中的完备正交函数系[11]。

3 例 子

定理 1 从理论上给出了高次非均匀 Haar 函数系的构造方法，这里以一个具体例子进行验证。

给定如下非均匀层次嵌套分割 X^3，通过本文方法，构造出相应的高次非均匀 Haar 函数系。

$$X^3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

运用本文方法，可以得到任意 k 次的非均匀 Haar 函数系。限于篇幅，这里只列出该非均匀分割上的 1 次与 2 次 Haar 函数系的基函数图像，见图 3 与图 4，并列出 1 次非均匀 Haar 函数的前 8 项基函数表达式。

$n = 0$：

$$V_{1,0}^1(x) = 1, 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$V_{1,0}^2(x) = \sqrt{3}(2x - 1), 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$n = 1$：

$$V_{1,1}^1(x) = \begin{cases} -\dfrac{45}{8}x + \dfrac{3}{2}, 0 \leqslant x < \dfrac{4}{7}; \\ \dfrac{26}{3}x - \dfrac{20}{3}, \dfrac{4}{7} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$V_{1,1}^2(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{8}(21x - 4), 0 \leqslant x < \dfrac{4}{7}; \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(7x - 6), \dfrac{4}{7} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$n = 2$：

$$V_{1,2}^1(x) = \begin{cases} -9x + \dfrac{3}{2}, 0 \leqslant x < \dfrac{2}{5}; \\ \dfrac{98}{3}x - \dfrac{91}{6}, \dfrac{2}{5} < x < \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

$$V_{1,2}^2(x) = \begin{cases} -\dfrac{7\sqrt{11}}{363}(280x - 193), \dfrac{4}{7} \leqslant x < \dfrac{5}{6}; \\ -\dfrac{\sqrt{11}}{3}(32x - 29), \dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$V_{1,2}^3(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{4}(15x - 2), 0 \leqslant x < \dfrac{2}{5}; \\ -\dfrac{7\sqrt{3}}{12}(35x - 18), \dfrac{2}{5} < x < \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

$$V_{1,2}^4(x) = \begin{cases} -\dfrac{7\sqrt{33}}{363}(126x - 83), \dfrac{4}{7} \leqslant x < \dfrac{5}{6}; \\ -\dfrac{\sqrt{33}}{3}(18x - 17), \dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

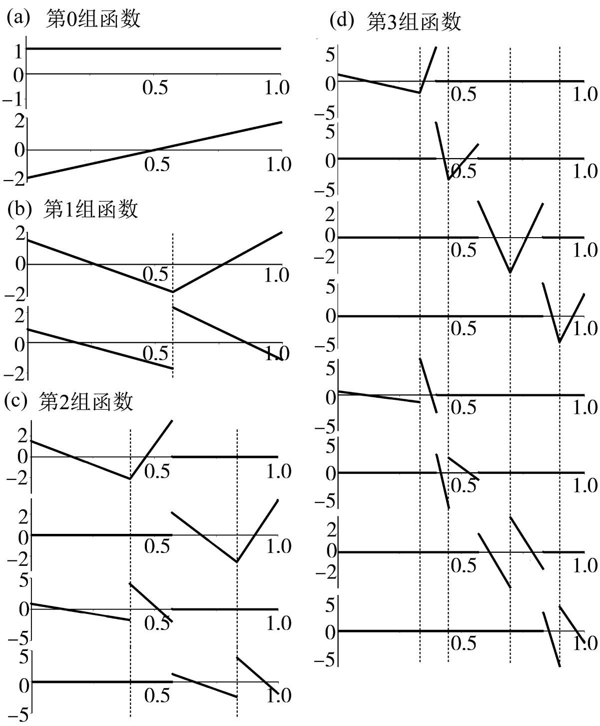

图 3 非均匀高次 Haar 函数（ $k = 1$ ）

Fig. 3　The high order non-uniform Haar functions ($k = 1$)

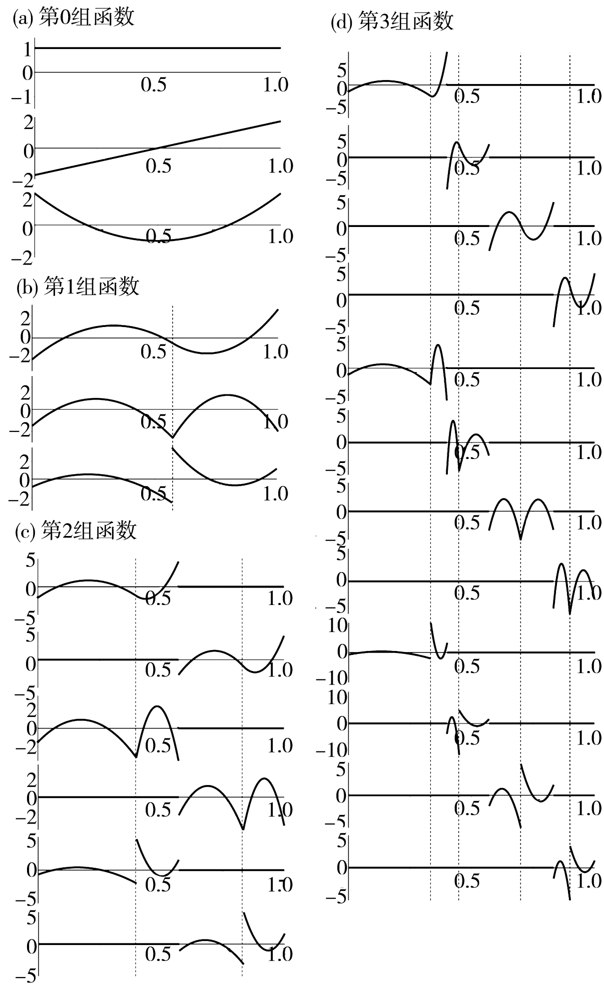

图 4　非均匀高次 Haar 函数（ $k = 2$ ）

Fig. 4　The high order non-uniform Haar functions ($k = 2$)

4　结　论

现有的正交分段多项式函数系定义在有限区间的均匀分割上，本文构造了一类非均匀正交分段多项式函数系，称之为高次非均匀 Haar 函数系。传统的 V－系统是它的一种特殊情形。根据给定的非均匀层次嵌套分割，根据本文方法，可以自动高效地得到相应的任意 k 次非均匀 Haar 函数系，并且该函数系具有正交性，再生性及收敛性。

参考文献：

[1]　齐东旭，宋瑞霞，李坚．非连续正交函数—U－系统、V－系统、多小波及其应用[M]．北京：科学出版社，2011.

[2]　杨发权，李赞，罗中良，等．一种 N 维数据块正交调制及其调解识别方法的研究[J]．中山大学学报（自然科学版），2012，52(5)：18－22.

[3]　蔡占川，陈伟．基于正交 GF 系统的散乱数据拟合及分析[J]．中山大学学报（自然科学版），2013，51(3)：73－77.

[4]　SONG R X, MA H, WANG T J, et al. Complete orthogonal V-system and its applications [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(3): 853－871.

[5]　HUANG C, YANG L H, QI D X. A new class of multi-wavelet bases: V-system [J]. Acta Mathematica Sinica, 2012, 28(1): 105－120.

[6]　熊刚强，齐东旭．高次 Walsh 系与高次 Haar 系[J]．宁夏大学学报（自然科学版），2011，32(2)：109－115.

[7]　宋瑞霞，王也娜，李成华，等．V－系统在形状相似检索中的应用[J]．计算机辅助设计与图形学学报，2014，26(11)：1930－1937.

[8]　SONG R X, ZHAO Z X, WANG X C, et al. An application of the V-system to the clustering of Chernoff faces [J]. Computers and Graphics, 2010, 34: 529－536.

[9]　SONG R X, YAO D X, WANG X C, et al. Retrieval method for 3D object group based on V-system [J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2012, 6(3): 340－353.

[10]　徐森林．实变函数论[M]．合肥：中国科学技术大学出版社，2013.

[11]　BOOR C D. A practical guide to the splines (revrised edition) [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.